In den letzten Monaten ist die Diskussion über neue didaktische Möglichkeiten im Mathematikunterricht, bzw. über andere Zugänge bei Verwendung des Computers langsam angelaufen. Bisher wurden CAS-Systeme doch dazu verwendet, den herkömmlichen Taschenrechner zu überbieten. Didaktisch geschah nichts. Dies scheint uns der falsche Ansatz zu sein. Gerade die Verwendung des PC ermöglicht vollkommen neue Wege und öffnet ein weites didaktisches Feld, das derzeit noch ziemlich brach liegt.
Die Benutzeroberfläche von Mathematica bietet nun genau diese Möglichkeiten, die in Zukunft mehr und mehr den Mathematikunterricht bestimmen werden.
Um den Lesern einen Einblick in die Benutzung eines Mathematica-Notebooks geben zu können, haben wir versucht, den Einstiegs in ein Notebook zu zeigen und anschließend von einigen Kapiteln den vollständigen didaktischen Aufbau wiederzugeben.

Maths & Fun

Interaktive Lernsoftware mit MATHEMATICA
für den Unterricht
an AHS und BHS
entwickelt und getestet von

Reinhard Simonovits und Hans Wilding, Graz

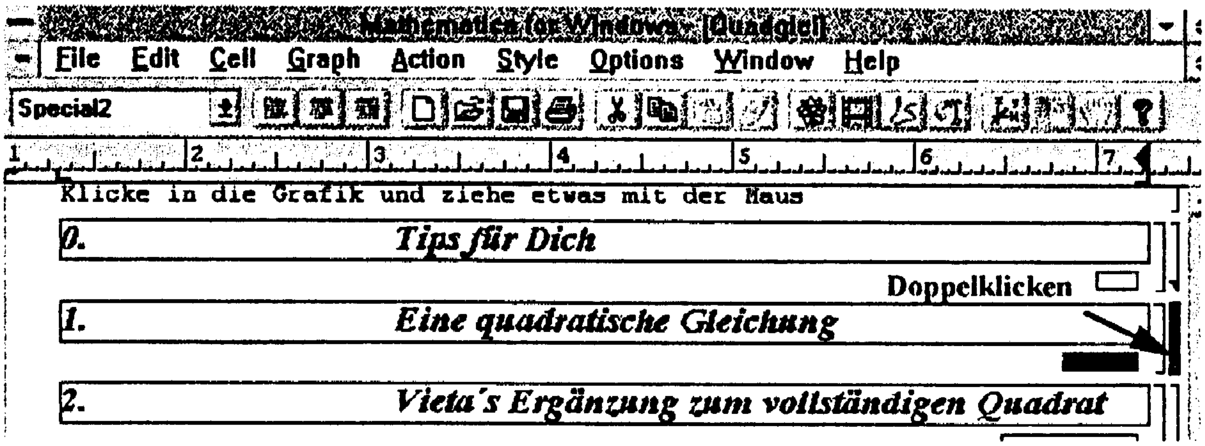
Vietas Idee zum Lösen einer Quadratischen Gleichung

Ein Notebook ist wie ein Buch zu lesen. Zuerst sehen wir das Inhaltsverzeichnis. Jedes Kapitel kann durch Doppelklick ausgewählt werden.

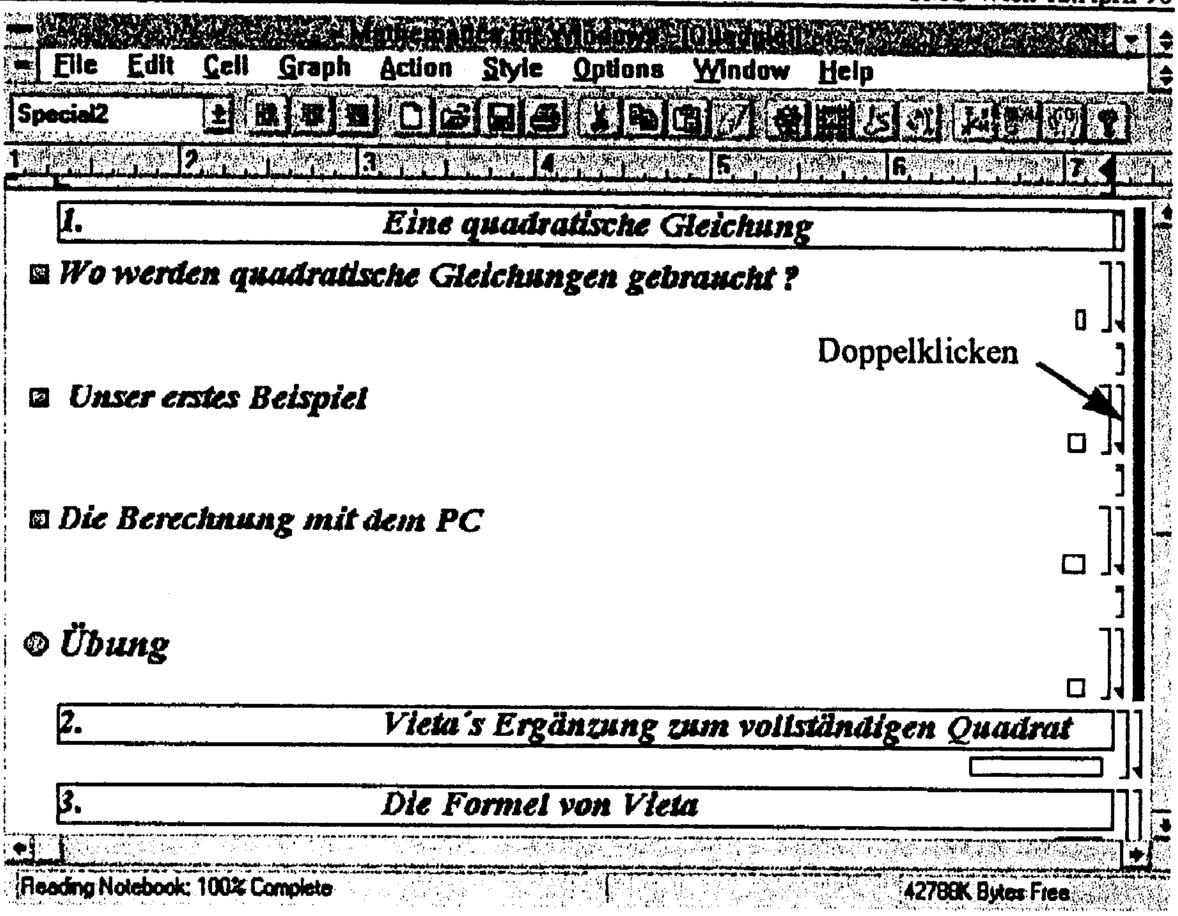
0.	*Tips für Dich*
1.	*Eine quadratische Gleichung*
2.	*Vieta's Ergänzung zum vollständigen Quadrat*
3.	*Die Formel von Vieta*
4.	*Magic Diskriminante*
5.	*Lösungen im komplexen Zahlenbereich C*
6.	*Beliebig genau rechnen mit NSolve*
7.	*Tricks mit den Lösungen: Die Sätze von Vieta*
8.	*Faktorisieren der quadratischen Gleichung*
9.	*Ein spannender Zugang*
10.	*Mathematica 2.2.3 Voreinstellungen*

In "Tips für Dich" erhalten die Schüler Hinweise über Inhalt und Bedeutung der einzelnen Kapitel.

Wir wählen nun das interessierende Kapitel durch Doppelklick aus.
Z.B." Eine quadratische Gleichung" .



Damit sind wir im Kapitel " Eine quadratische Gleichung " gelandet und können nun weiter auswählen.



Wir interessieren uns nun für " Unser erstes Beispiel " und öffnen es durch Doppelklick.

Jetzt ist unser interaktives Notebook zur Bearbeitung bereit. Nach jeder Sequenz warten auf das Schülerteam (je zwei an einem PC) Übungen.

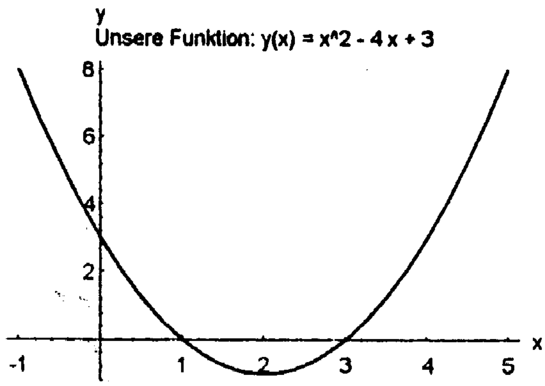
Unser erstes Beispiel

Wir schauen uns die

quadratische Funktion: y(x) = x^2 - 4 x + 3

genau an:

```
DasErsteBild = Plot[ x^2 - 4 x + 3, {x,-1,5},
    PlotLabel-> "Unsere Funktion: y(x) = x^2 - 4 x + 3"];
```



Du siehst, diese Kurve - sie heißt auch PARABEL 2.Ordnung - schneidet die x-Achse an zwei Stellen. Das ist wichtig. Es gibt also ZWEI Schnittpunkte.
Wir wissen bereits von der linearen Funktion, daß Kurvenpunkte mit der y-Koordinate Null die Bezeichnung NULLSTELLEN (x - Wert , 0) haben.

Miß mit dem Cursor die Nullstellen ab und setze sie in den Text ein:

Die Kurve mit der Gleichung y(x) = x^2 - 4 x + 3 schneidet die x-Achse ungefähr bei x1 = ... und x2 = ...

Die Berechnung mit dem PC

Die genaue Berechnung gelingt mit Solve. Welchen x Wert müssen wir eigentlich suchen ??

Wir müssen jene x-Werte finden, für die gilt :

$$x\hat{}2 - 4\,x + 3 = 0$$

Jetzt siehst Du Deine erste QUADRATISCHE GLEICHUNG.
Wir geben also ein:

```
Solve[ x^2 - 4 x + 3 == 0, x ]
                              (* Das x hinter dem Beistrich sagt
                              dem Computer, daß nach x aufgelöst
                              werden soll *)
```

```
{{x -> 1}, {x -> 3}}
```

Wir erhalten ZWEI Werte für x ! Wir machen die Probe:

```
x^2 - 4 x + 3 /. x -> 1
0
x^2 - 4 x + 3 /. x -> 3
0
```

Ok.

Einfach easy: Lösungen der quad. Gleichung = Nullstellen der quad. Funktion.

Übung

(1.1) Löse graphisch die Gleichung : x^2 - 1000 x + 210000 = 0.
(Antwortsatz)
Löse sie auch mit Solve und mache die Probe.
Hinweis: Wähle den x Bereich von 100 bis 1000.

(1.2) Überraschung:
Löse graphisch die Gleichung : x^2 - 1000 x + 250000 = 0.
(Antwortsatz)
Löse sie auch mit Solve und mache die Probe.
Hinweis: Wähle den x Bereich von 100 bis 1000.

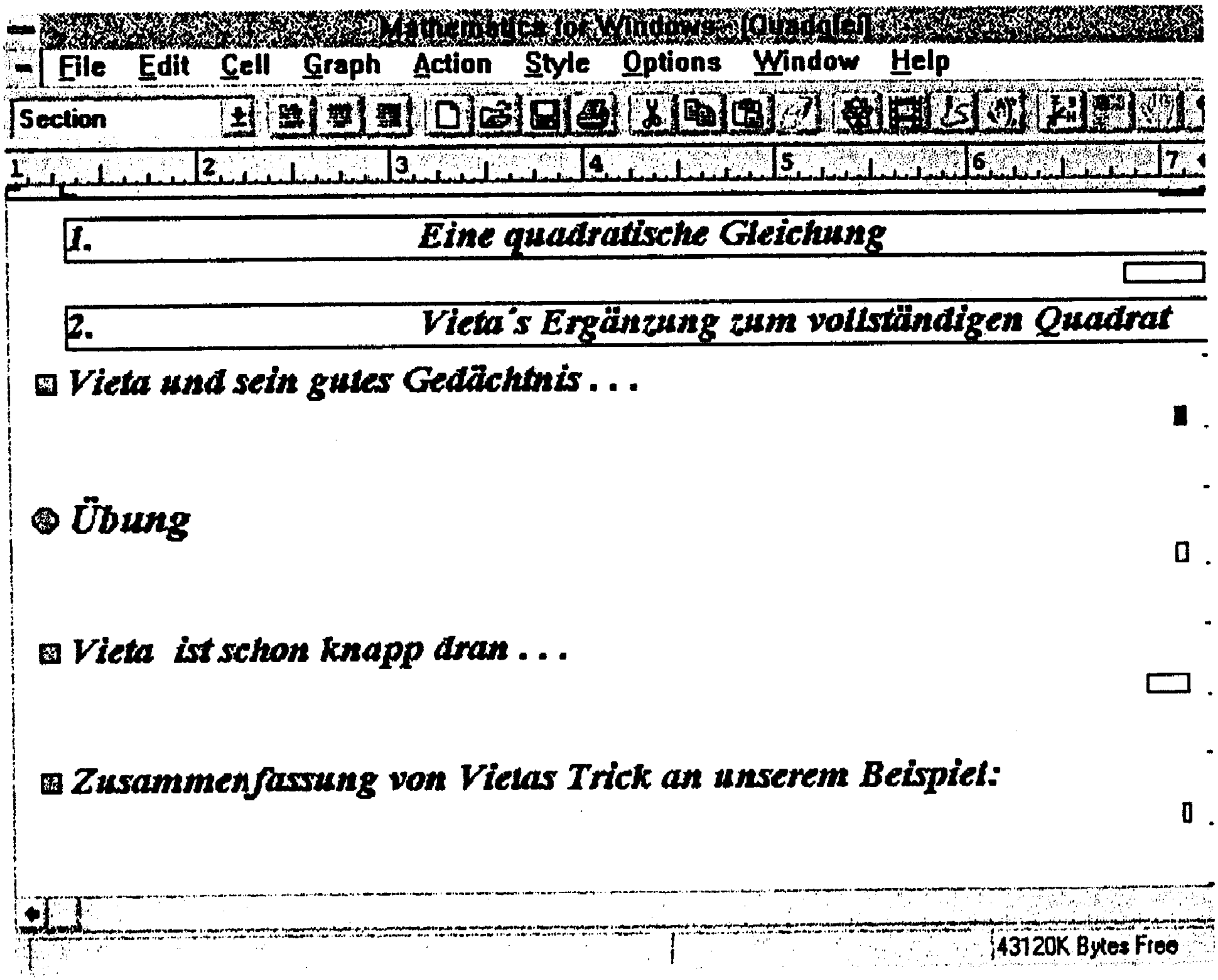
(1.3) Noch eine Überraschung:
Löse NUR graphisch die Gleichung : x^2 - 1000 x + 270000 = 0.
(Antwortsatz)
Hinweis: Beachte, daß Nullstellen nicht "Pflicht" sind.
Wähle den x Bereich von 100 bis 1000.

(1.4) Eine quadratische Gleichung kann im reellen Zahlenbereich wieviel Lösungen haben? (Antwortsatz)

(1.5) Was hat eine quadratische Gleichung mit der Nullstelle einer Funktion zu tun? (Antwortsatz)

(1.6) Woran erkennst Du graphisch, wieviele Lösungen es gibt? Hier sind 3 Zeilen Text notwendig. Denke Dir, Du erklärst es Deinem Nachhilfeschüler.

Uns interessiert nun z.B. das Kapitel "Vietas Ergänzung zum vollständigen Quadrat".
Wir öffnen es wieder durch Doppelklick.



Wir steigen nun ein und gehen das gesamte 2. Kapitel durch.

2. *Vieta's Ergänzung zum vollständigen Quadrat*

Vieta und sein gutes Gedächtnis . . .

Vieta hatte um 1592 (100 Jahre nach Columbus ...) eine Idee:

Das x^2 - 4 x + 3 in der Gleichung x^2 - 4 x + 3 = 0 erinnert mich an (x-2)^2 .
Wieso ???

```
Expand[ (x - 2)^2 ]
                  2
4 - 4 x + x
```

Eh klar! Zwei Terme sind bereits gleich, nämlich x^2 und - 4x .
Also x^2 - 4 x + 3 ist bis auf einen Term gleich (x - 4/2)^2.

Übung

(2.1) x^2 + 10 x - 36 = 0. Mach die ersten 2 Terme gleich (x + ...)^2 und überprüfe mit Expand.

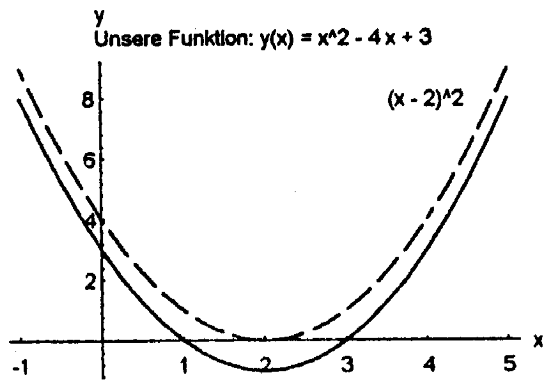
(2.2) x^2 + 5 x - 14 = 0. Mach die ersten 2 Terme gleich (x + ...)^2 und überprüfe mit Expand.

(2.3) x^2 - 7 x - 18 = 0. Mach die ersten 2 Terme gleich (x + ...)^2 und überprüfe mit Expand.

Vieta ist schon knapp dran . . .

"Das werden wir auch noch hinkriegen, der Kurventyp stimmt ja", sagte sich Vieta.
Nun der Plot gibt ihm recht.

```
BeideKurven = Plot[ {x^2 - 4 x + 3, (x - 2)^2},  {x,-1,5},
        PlotStyle -> { {}, {Dashing[{.06,.02}],Red} },
        PlotLabel -> "Unsere Funktion: y(x) = x^2 - 4 x + 3",
        Epilog -> {Red, Text["(x - 2)^2", {4,8}]} ];
```



Allerdings sind NUR ZWEI Terme gleich, nämlich x^2 und - 4x, der dritte ist verschieden.

"Wie komme ich nun von (x - 2)^2 = x^2 - 4 x + 4 auf x^2 - 4 x + 3 ?" fragt sich Vieta.

Die Grafik zeigt Dir die Antwort. (x - 2)^2 braucht nur um 1 nach unten verschoben werden. Also (x - 2)^2 - 1 . Du kannst dies mit dem Cursor nachmessen.

```
Expand[ ( x - 2 )^2 - 1 ]
```

$$3 - 4\,x + x^2$$

S u p e r ! Das ist genau unsere Kurve.

Was habe ich aber davon, wenn ich weiß, dass (x - 2)^2 - 1 = x^2 - 4 x + 3 ?

Vieta überlegt so: x^2 - 4 x + 3 = 0 kann ich nicht nach x auflösen.
Wohl aber (x - 2)^2 - 1 (was natürlich dasselbe ist !!!) und er beginnt:

$$(x - 2)^2 - 1 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 1$$

Das kannst auch Du nach x auflösen. Wir ziehen auf beiden Seiten die Quadratwurzel:

x - 2 = +/- Wurzel[1]

Das ist schlicht und einfach genial!

Damit erhalten wir zwei Lösungen:

x1 = 2 - Wurzel[1] und x2 = 2 + Wurzel[1].

```
Lösungsmenge = { 2-Sqrt[1], 2+Sqrt[1] }
{1, 3}
```

`Die Lösung der Gleichung x^2 - 4 x + 3 = 0 lautet: { 1, 3 }`

In Mathematica schreibt man statt Wurzel[1] Sqrt[1]. (sprich: squareroot engl.)

Voala, wir haben unsere erste quadratische Gleichung geknackt!

Zusammenfassung von Vietas Trick an unserem Beispiel:

x^2 - 4 x + 3 = (x - 4/2)^2 - 1 , das klappt immer !!

Einfach easy: Dieser Trick heißt Ergänzung zum vollständigen Quadrat.

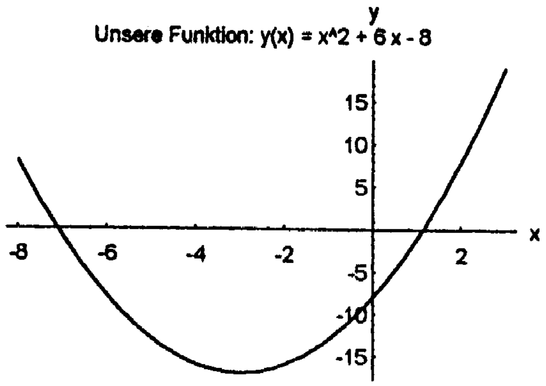
Ergänzung zum vollständigen Quadrat

Noch ein Beispiel: Finde die Lösung der folgenden quadratischen Gleichung

x^2 + 6 x - 8 = 0

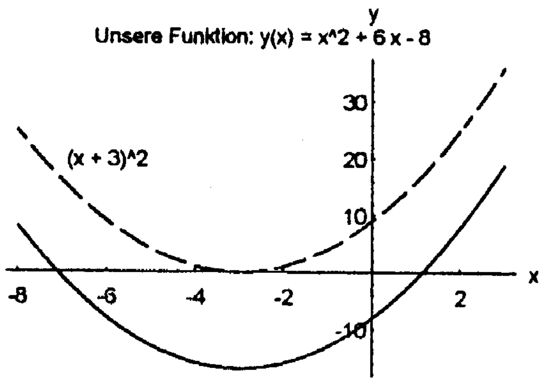
Zuerst veranschaulichen wir uns die Gleichung:

```
Plot[  x^2 + 6 x - 8, {x, -8, 3},
    PlotLabel -> "Unsere Funktion: y(x) = x^2 + 6 x - 8" ];
```



Aha, es gibt zwei Nullstellen. Jetzt ergänzen wir zum Quadrat: (x + 6/2)^2

```
Plot[ {x^2 + 6 x - 8, (x + 3)^2},  {x,-8,3},
       PlotStyle -> { {}, {Dashing[{.06,.02}],Red} },
      PlotLabel -> "Unsere Funktion: y(x) = x^2 + 6 x - 8",
     Epilog ->{ {Red,Text["(x + 3)^2",{-6,20}]} } ];
```



Die Kurve (x + 3)^2 muß wieder nach unten verschoben werden, um die Kurve x^2 + 6 x - 8 zu erhalten. Um wieviel gehts nach unten ??
Du kannst dies ungefähr mit dem Cursor abmessen.

Die Kurve (x+3)^2 muß um ca. ... Einheiten nach unten .
(Graphische Ergänzung zum vollständigen Quadrat)

Die einfache Frage ist: wieviel müssen wir von x^2 + 6 x + 9 abziehen, um zu x^2 + 6x - 8 zu gelangen?
Genau. 17

```
Expand[( x + 3)^2 - 17]

                 2
-8 + 6 x + x
```

Das ist unsere Gleichung! (x+3)^2 = 17. Dann wie oben Wurzel ziehen:

```
Lösungsmenge = { -3 - Sqrt[17], -3 + Sqrt[17] } //N
{-7.12311, 1.12311}
```

Die Lösung von x^2 + 6 x - 8 = 0 lautet: { -7.12, 1.123 }.

Probe mit beiden Lösungswerten auf einmal:

```
-8 + 6 x + x^2 == 0/. { { x -> Lösungsmenge[[1]] },
                        { x -> Lösungsmenge[[2]] } }
```

```
{True, True}
```

Ok.

Die Zahl in der Wurzel, hier 17, heißt DISKRIMINANTE.

Übung

Berechne mit der Hand durch Ergänzung aufs vollständige Quadrat, wie oben gezeigt.

(2.4) x^2 - 1000 x + 210000 = 0

(2.5) x^2 + 9 x - 36 = 0

(2.6) x^2 - 14 x + 49= 0

(2.7) x^2 - 7 x - 18 = 0

und mache mit Mathematica die Probe.

Wir überspringen nun das Kapitel 3 "Die Formel von Vieta" und steigen in Kapitel 4 "Magic Diskriminante"
ein:

4. Magic Diskriminante

Vieta hat den suggestiven Blick...

Sag mir voraus, also durch "bloßes hinschauen", ob eine quadratische Gleichung zwei, eine oder gar keine Lösung im reellen Zahlenbereich hat!

Nach längerem Herumspielen begann Vieta folgenden Ausdruck (Diskriminante) zu schätzen:

p^2/4 - q

Welchen Wert hatte die Diskriminante bei unserem Einführungsbeispiel ??

x^2 - 4 x + 3 == 0

p/2 = -2, q = 3.

```
Diskriminante = 4 - 3
```

```
1
```

Die Diskriminante kannst Du durch bloßes Hinschauen ausrechnen!

Aber wie ist das mit der "Prophezeiung der reellen Lösungen" ?

x1,2 == -p/2 +/- Sqrt[p^2/4 - q]

Wenn p^2/4 - q oder gelehrt: die Diskriminante > 0 ist, das ist meistens der Fall, kannst du die Wurzel ohne Probleme ziehen.

Einfach easy: Wenn p^2/4 -q > 0, dann gibt es wegen dem +/- ZWEI reelle Lösungen.

Bsp: x^2 + 5 x - 24 = 0.
Scharf hingeschaut: (5/2)^2 + 24 ist sicher > 0. ====> *2 reelle Lösungen!*

```
x^2 + 5 x - 24 = 0 hat zwei reelle Lösungen.
```

Übung

Schau "scharf" auf die Gleichung und sag voraus, ob die Gleichung 2 reelle Lösungen hat oder nicht.

(4.1) x^2 - 6 x + 10 = 0 (Antwortsatz)

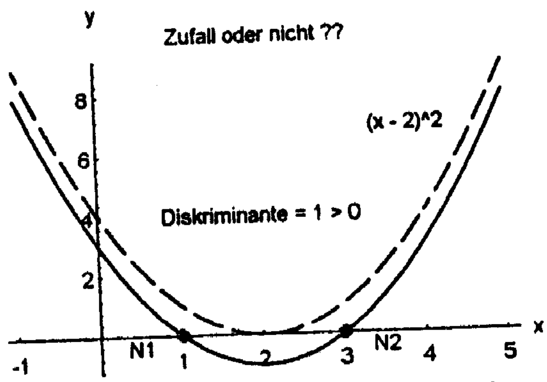
(4.2) x^2 - 10 x + 25 = 0 (Antwortsatz)

(4.3) x^2 + 3 x - 10 = 0 (Antwortsatz)

Zeig mir die Diskriminante in der Zeichnung

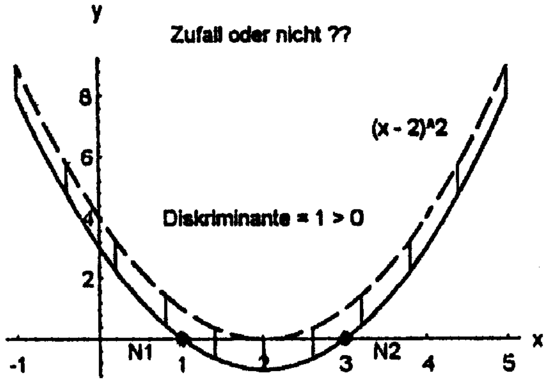
Zur Erinnerung die graphische Darstellung bei positiver Diskriminante:
Um wieviel mußte die Kurve nach unten verschoben werden?

```
Plot[ {x^2 - 4 x + 3, (x - 2)^2},  {x,-1,5},
      PlotStyle -> { Blue, {Dashing[{.06,.02}],Black} },
      PlotLabel-> "Zufall oder nicht ??",
      Epilog -> { {Black,Text["(x - 2)^2",{3.8,7}]},
          {Blue,Text["Diskriminante = 1 > 0",{2,4}] },
          {Cyan,PointSize[.02],Point[{1,0}], Point[{3,0}],
           {Red,Text["N1",{.5,-.4}],Text["N2",{3.5,-.4}]}} }];
```



Richtig. Um 1 gings nach unten. Der Wert der Diskriminante ist genau 1 !
Manche können nicht glauben, daß die beiden Kurven parallel verlaufen ? Wie ist das mit Dir ? Was meinst Du ?
Du kannst dies so untersuchen: Miß an jeder beliebigen Stelle unserer Kurve y(x) = x^2 - 4 x + 3 den vertikalen Abstand zur Kurve y(x) = (x-2)^2.
Verwende dazu die nächste Eingabe beliebigeStellen[...] . Hier sind schon einige "beliebige" Stellen eingezeichnet. Wähle den Eingabewert zwischen 0 und 1.

```
beliebigeStellen[.6];
```



Miß nun alle roten Streckenstücke mit dem Cursor ab.

Alle Streckenstücke sind...

Zufall oder nicht ....?

Ist diese Zahlengleichheit Zufall oder ist das immer so ?

Schau dir die vollständige Ergänzung an, hier taucht die 1 auf.

x^2 - 4 x + 3 = (x - 2)^2 - 1 = 0; (x - 2)^2 = 1
x^2 + p x + q = (x + p/2)^2 - p^2/4 + q = 0; (x + p/2)^2 = p^2/4 - q

Gleichsetzen: ===> *p^2/4 - q = 1*

Das ist also immer so. Die Kurven unterscheiden sich durch die Diskriminante!

Wird die x-Achse von der Kurve geschnitten,

so ist die Diskriminante > 0.

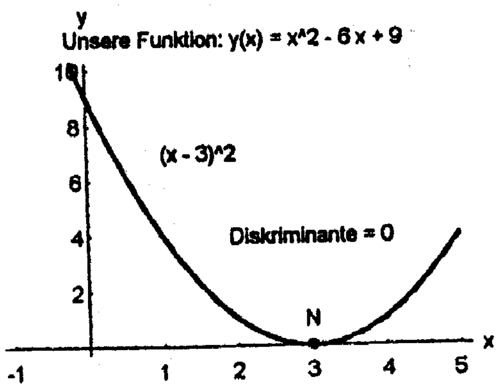
Ein Spezialfall...

Wo liegen hier die Nullstellen ?

$$y(x) = x\text{^}2 - 6\,x + 9$$

Wir betrachten wieder das Quadrat: (x - 6/2)^2

```
Doppellösung = Plot[ {x^2 - 6 x + 9, (x - 3)^2},  {x,-1,5},
   PlotStyle -> { {Blue,Thickness[.005]},
           { Thickness[.007],Dashing[{.03,.02}],Black} },
   PlotLabel -> "Unsere Funktion: y(x) = x^2 - 6 x + 9",
      Epilog -> { { Black, Text["(x - 3)^2",{1.5,7}] },
                  { Blue, Text["Diskriminante = 0",{3,4}] },
                  { Cyan, PointSize[.02], Point[{3,0}],
                        { Red, Text["N",{3,1} ]}}  }
                 ];
```



Warum gibts nur mehr eine Nullstelle ??? Was sagt Mathematica ?

```
Solve[x^2 - 6 x + 9 == 0, x]
{{x -> 3}, {x -> 3}}
```

Zwei gleiche Lösungen ??

Erinnern wir uns. Wie kann x^2 - 6 x + 9 zerlegt werden ?

```
Factor[ x^2 - 6 x + 9 ]
        2
(-3 + x)
```

genau: x^2 - 6 x + 9 = (x - 3)^2

Wir sehen: Die quadratische Gleichung IST BEREITS EIN VOLLSTÄNDIGES QUADRAT. Dies ergibt immer eine sogenannte DOPPELLÖSUNG. Graphisch wird die x-Achse von der Kurve nicht mehr geschnitten, sondern nur mehr BERÜHRT. Wie groß ist nun die Diskriminante ??

```
Diskriminante = (-6)^2/4-9
0
```

Wird die x-Achse von der Kurve berührt,ist die Diskriminante 0.

Und wie ist das mit der "Prophezeiung der reellen Lösungen" ?

Einfach easy: Diskriminante = 0 bedeutet immer eine Doppellösung

Bsp: x^2 - 8 x + 16 = 0.
Scharf hingeschaut: (8/2)^2 - 16 = 0. ====> Doppellösung!

x^2 - 8 x + 16 = 0 hat eine Doppellösung.

Übung

Schau "scharf" auf die Gleichung und sag voraus, ob die Gleichung eine Doppellösung hat :

(4.4) x^2 - 6 x + 37 = 0 (Antwortsatz)

(4.5) x^2 + 6 x + 9 = 0 (Antwortsatz)

(4.6) x^2 - 4 x + 29 = 0 (Antwortsatz)

(4.7) Baue selbständig 3 quadratische Gleichungen mit einer Doppellösung. Überprüfe graphisch wie oben mit dem Plot Doppellösung.

(4.8) Formuliere ein Merksätzchen, in dem vorkommen: Vollständiges Quadrat, genau eine Nullstelle, Diskriminante = 0.

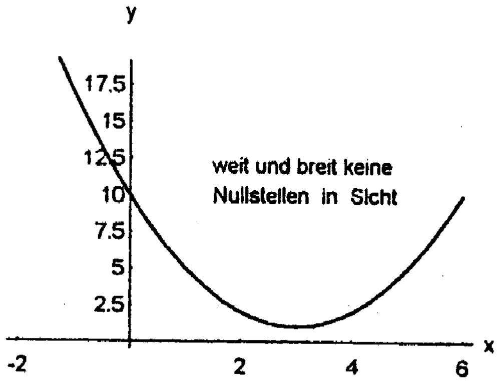
Schlicht und einfach fürs erste unlösbar

Noch ein anderes Beispiel:

y(x) = x^2 - 6 x + 10

Wo liegen hier die Nullstellen ?

```
Plot[  x^2 - 6 x + 10, {x, -2, 6},
        Epilog -> { {Red,
        Text["   weit und breit keine \n
        Nullstellen  in  Sicht",{3,11}]} }];
```



Was sagt Mathematica ?

```
Solve[x^2 - 6 x + 10 == 0, x]
{{x -> 3 - I}, {x -> 3 + I}}
```

Dies ist vorerst etwas unverständlich.

Was ist I ?? Wir fragen Mathematica.

```
?I
I represents the imaginary unit Sqrt[-1].
```

I = Sqrt[-1]

I ist die sogenannte imaginäre Einheit.

Wir verlassen unsere bekannte Zahlenwelt . . .

Wir überschreiten nun den Zahlenbereich der reellen Zahlen. Wir erweitern unsere Welt in den komplexen Zahlenbereich hinein.

Und wie ist das hier mit der "Prophezeiung der reellen Lösungen" ?

Einfach easy: Wenn p^2/4 - q < 0, dann gibt es wegen dem +/- ZWEI KOMPLEXE Lösungen!

Es gibt also zwei Lösungen, nur "leben" sie nicht in Waterworld, sondern im komplexen Zahlenbereich.

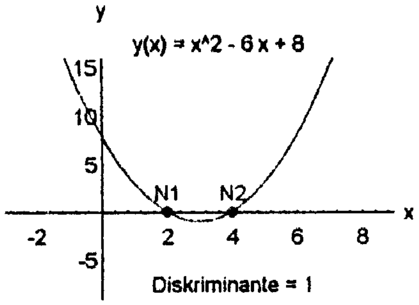
Bsp: x^2 - 6 x + 10 = 0.
Scharf hingeschaut: (6/2)^2 - 16 < 0 ====> Komplexe Lösung!

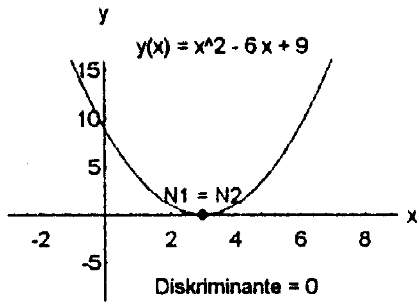
```
Wird die x-Achse von der Kurve nicht geschnitten,
ist die Diskriminante < 0.
```

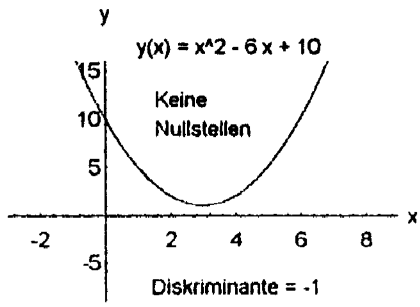
Der Film: "Jetzt kennen wir uns aus"

In Movie[Zahl] gibst du die Anzahl der Bilder in der Animation an.

```
Movie[12];
```







Der Film kann nur andeutungsweise gezeigt werden. Spätestens hier versagt das "herkömmliche Mathematikbuch".

Zum Einsatz von Notebooks im Unterricht

Wir verwenden didaktisch aufbereitete Lernsoftware in Form von Mathematica - Notebooks an der BHAK Grazbachgasse in Graz nun bereits das 3. Jahr und können auf einige Erfahrung zurückgreifen. Die Arbeit in Zweierteams am PC hat sich sehr bewährt. Es ist eine großartige Möglichkeit die Teamarbeit zu forcieren. Als äußerst wichtig erwiesen sich die Übungen, die jewiels in von den Schülern angelegten Notebooks bewältigt und ausgedruckt dem Lehrer abgegeben werden.
Wir arbeiten ca. die Hälfte der Wochenstunden pro Klasse am PC. Die andere Hälfte der Unterrichtszeit läuft über Tafelunterricht ab, wobei hier wichtige Befehle bereits vorgestellt werden. Momentan stehen uns ca.
25 Notebooks,alle von uns verfaßt, zur Verfügung. Zur Zeit nehmen alle zweiten Jahrgänge, zwei dritte sowie vier Kolleg-Klassen am Unterrichtsversuch "Mathematik am PC" teil.

Wir sind auch im Internet : http://www.borg-graz.ac.at/~bhakgrb/mmawww.htm

Weitere Informationen bei:
Dr.Reinhard Simonovits, Dr. Hans Wilding
beide Handelsakademie Grazbachgasse 71
8010 Graz, Tel.: 0316 / 82 94 56, Fax.: /82 24 10 21